# Лекция

**Интегральные уравнения Фредгольма первого рода.**

**Интегральное уравнение Фредгольма первого рода как некорректно поставленная задача.**

**Понятие корректно поставленной задачи.**

Решение всякой количественной математической задачи обычно заключается в нахождении “решения” по заданным “исходным данным” . Запишем это в форме

,

где – некоторый оператор. Будем считать и элементами метрических пространств и . и расстояния между элементами пространств и .

**Определение.** Решение называется устойчивым, если для любого можно указать такое , что из неравенства следует, что , где и -произвольные элементы , , .

**Определение.** Задача называется корректно поставленной на паре метрических пространств , если выполняются условия:

1. Для всякого элемента существует решение .
2. Решение определяется однозначно.
3. Решение устойчиво.

Задачи, не удовлетворяющие перечисленным требованиям, называются некорректно поставленными.

Метрики в пространствах и характеризуют в каком смысле понимается малое изменение и От того, каким образом выбрана метрика, может зависеть, будет ли решение устойчиво при изменении или нет, а следовательно, будет ли задача корректна.

**Пример.** Рассмотрим задачу определения производной от заданной на функции , т.е. . Будем измерять близость элементов как в пространстве , так и в пространстве , в метрике равномерного приближения, т.е.

, . (1)

Тогда решение поставленной задачи неустойчиво: малому изменению функции может соответствовать сколь угодно большое изменение .

Теперь сохраним в пространстве старую метрику, а для элементов введем метрику по-другому. Будем рассматривать как элемент пространства непрерывно дифференцируемых на функций с метрикой

.

Пусть , . Тогда . Следовательно, малому изменению в метрике соответствует малое изменение в метрике и решение поставленной задачи устойчиво.

Говоря о корректности или некорректности математической задачи, всегда надо указывать в какой метрике измеряются решения и входные данные. Однако, в реальных физических задачах выбор метрике не произволен, а определяется постановкой задачи.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

. (2)

Пусть ядро непрерывно, не является собственным значением ядра. Рассмотрим метрические пространства и непрерывных на функций с расстоянием (1).

Решение однозначно определяется из уравнения (2) по функции .

,

где – непрерывная функция. Отсюда видно, что решение поставленной задачи устойчиво – малому изменению соответствует малое изменение .

Если , тогда

, где .

**Анализ интегрального уравнения Фредгольма первого рода с точки зрения корректности задачи.**

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

(3)

Пусть ядро непрерывно. Считаем, что и элементы пространств непрерывных на функций с метрикой (1).

Если ядро замкнуто, то решение уравнения (3) единственно. Замкнутое ядро характеризуется тем, что собственные функции ядра образуют полную ортогональную систему функций.

Непрерывность , вообще говоря, не гарантирует существование непрерывного решения. Пусть функция непрерывна, но имеет разрывы производной при некоторых значениях , а ядро непрерывно дифференцируемо по . Тогда при любой непрерывной функции левая часть (3) всюду на имеет непрерывную производную, в то время как правая часть имеет непрерывную производную не при всех . Следовательно, непрерывного решения не существует.

Рассмотрим теперь, при каких необходимых условиях может существовать непрерывное решение уравнения (3), в случае, когда ядро непрерывно на .

Из (3) следует, что является представимой через ядро функцией. Коэффициенты Фурье и по системе собственных функций ядра для функций и связаны формулой . В силу неравенства Бесселя для ряд сходится, а следовательно, сходится и ряд , т.е. коэффициенты должны убывать достаточно быстро. Непрерывность обеспечивает сходимость ряда , следующую из неравенства Бесселя для , но, вообще говоря, не обеспечивает сходимость ряда . Следовательно, решение уравнения (3) может существовать не при любой непрерывной функции , а лишь при такой, для которой сходится ряд ( при ).

Рассмотрим вопрос устойчивости. Пусть является решением уравнения (3). Введем функцию , где – некоторый параметр. Получим уравнение, которому удовлетворяет в предположении, что непрерывна вместе с производной по .

откуда

,

, ,

откуда следует, что

, где – не зависящая от постоянная.

Поэтому при достаточно большом значение как угодно мало, но , т.е. эта величина малой не является.

Отсюда следует, что решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода неустойчиво относительно возмущения функции . Уравнение (3) принадлежит классу некорректно поставленных задач.

**Уравнения Фредгольма первого рода.**

Интегральное уравнение Фредгольма первого рода

, (1)

где , – известные функции, - искомая функция.

Было показано, что для любой непрерывной функции решение уравнения (1), вообще говоря, не существует при сколь угодно “хорошем” ядре .

**Пример.** Интегральное уравнение

t

с ядром , .

В классе интегрируемых ( в частности, непрерывных) функций это уравнение не имеет решений.

В силу теоремы Гильберта-Шмидта для существования решения уравнения (1) необходимо, чтобы функция разлагалась по собственным функциям ядра :

. (2)

При выполнении этого условия решение уравнения (1) можно искать в виде

. (3)

Подставляя (3) в (1) и сравнивая с (2), получим:

, где .

.

Учитывая, что , получим

или

, .

Если мы хотим, чтобы решение принадлежало принадлежала , надо наложить на дополнительное требование.

**Теорема (Пикара).** Интегральное уравнение первого рода с замкнутым симметричным ядром

,

где имеет , и при том единственное, решение в классе тогда и только тогда, когда ряд

(4)

сходится.

Здесь – характеристические числа ядра , – коэффициенты Фурье функции относительно собственных функций этого ядра:

. (5)

Симметричное ядро называется замкнутым в , если каждая функция , удовлетворяющая тождеству

,

равна нулю почти всюду на . Замкнутое ядро характеризуется тем, что собственные функции ядра образуют полную в ортогональную систему функций.

Доказательство.

Предположим, что существует решение уравнения (1). Тогда

. (6)

Здесь мы воспользовались тем, что

и тем, что в силу симметричности ядра

.

Равенство (6) может быть записано в виде

, (7)

откуда видно, что числа являются коэффициентами Фурье функции . Ряд, состоящий из квадратов этих коэффициентов должен быть сходящимся. (необходимость доказана).

Докажем достаточность. Предположим, что ряд (4) сходится. Тогда в силу теоремы Фишера-Рисса существует функция , и притом единственная, для которой числа являются коэффициентами Фурье по системе функций , т.е. выполняется равенство (7) для всех , . Надо доказать, что эта функция удовлетворяет уравнению (1). Действительно, в силу самого построения функции функции и имеют одни и те же коэффициенты Фурье относительно полной системы собственных функций ядра . Следовательно, функции и

тождественны в метрике .

Если ядро не является замкнутым, то решение уравнения (1) не единственно. Пусть – не равные нулю почти всюду функции такие, что

, ., n.

Тогда, если – решение уравнения (1), то функция

,

где , ., n произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения. В случае вырожденного ядра решение уравнения (1) может содержать бесконечное число постоянных.

Требование замкнутости ядра является существенным не только для единственности решения уравнения (1), но и вообще для разрешимости этого уравнения.

Если отказаться от требования замкнутости, то среди уравнений вида

,

где – заданная непрерывная функция, не ортогональная ко всем , а – любая непрерывная функция, ортогональная ко всем , можно найти неразрешимые уравнения.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

.

Оно имеет решение . Можно проверкой убедится, что решением будут также функции

,

где , и – любые действительные числа, удовлетворяющие условию .

,

с другой стороны, уравнение

неразрешимо.

Для решения некоторых интегральных уравнений Фредгольма первого рода можно применять метод последовательных приближений.

**Теорема.** Пусть – симметричное положительно определенное – ядро, и пусть уравнение

, (1)

однозначно разрешимо. Тогда последовательность , определяемая рекуррентным соотношением

, . (8)

где , (9)

и - наименьшее характеристическое число ядра , сходится в среднем к решению уравнения (1).

Доказательство. Положим в равенстве (8) , тогда

, .

откуда получим

, . (8.1)

Умножим обе части (8.1) на собственную функцию ядра и проинтегрируем по от

до . Получим

, .,

, .

Так как , то

.

Следовательно

, .

или

, .

Рассмотрим интеграл .

В силу полноты системы функций имеем

.

На основании неравенства (9) , где - наименьшее характеристическое число ядра имеем , , и поэтому для любого >0 можно указать такой номер , что при , .

Таким образом приходим к неравенству

,

которое означает, что последовательность сходится в среднем к решению уравнения (1).

Рассмотрим опять уравнение

(1)

не предполагая теперь ядро симметричным. Применим к его решению общий метод неопределенных коэффициентов. Суть этого метода – разложение искомой функции по некоторой полной системе функций. Он оказывается, вообще, хорошо приспособленным к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

Будем искать решение уравнения (1) в виде

, (11)

где функции , . образуют некоторую полную систему на интервале ; – некоторая весовая функция, которую следует выбирать близкой к и тем самым улучшить сходимость ряда (11). Если о решении мало известно, то можно положить . Подставляя в форме (11) в уравнение (1), получим

или

, (12)

где – известные функции:

. (13)

Таким образом, решение интегрального уравнения сводится к нахождению коэффициентов по известным функциям и .

Это особенно просто делается в двух случаях:

1. Если функции , ., то правая часть (12) оказывается степенным рядом, так что неизвестные коэффициенты можно определить путем сравнения коэффициентов этого ряда с соответствующими коэффициентами в разложении по степеням .
2. Если функции образуют ортогональное с весом семейство на интервале : , то коэффициенты легко определяются из (12) по формулам: , где .

К сожалению, чаще функции не являются ни степенями , ни элементами ортогональной системы и определение коэффициентов бывает сопряженно с большими техническими трудностями.

В качестве примера, иллюстрирующего изложенный метод, рассмотрим случай .

Это имеет место, когда ядро интегрального уравнения является производящей функцией для семейства ортогональных полиномов.

Функция называется производящей для системы функций

, , …, , …,

если

, ,

т.е. если функции , . получаются в результате разложения в ряд по степеням .

Производящую функцию для полиномов Эрмита можно записать в виде

. (14)

Это разложение можно применить для решения интегрального уравнения

. (15)

Задачи такого типа возникают в вопросах о распространении тепла, когда искомым является первоначальное распределение источников, порождающее некоторое заданное распределение температуры. Положим

.

Используя разложение (14) ядра уравнения (15) и то, что

,

приводим уравнение (15) к виду

.

Разложим в степенной ряд, получим .

Откуда получаем или . Окончательно, получаем ответ

.